

1. Relations fonctionnelles

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

$$a^t = e^{t \ln(a)}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} [e^{it} + e^{-it}], \quad \cosh t = \frac{1}{2} [e^t + e^{-t}]$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} [e^{it} - e^{-it}], \quad \sinh t = \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}]$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

2. Calcul différentiel et intégral

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (e^t) = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^\alpha) = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^\alpha) = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t^\alpha} \right) = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t^\alpha} \right) = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\ln t) = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} (t^\alpha) = 0$$

$$\text{Si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} (t^\alpha) = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} (t^\alpha \ln(t)) = 0$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\cosh t$	$\sinh t$
e^t	e^t	$\sinh t$	$\cosh t$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\operatorname{Arcsin} t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{Arctan} t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$	$e^{\alpha t}$	$\alpha e^{\alpha t}$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(ku)' = ku' \qquad (e^u)' = e^u u'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad u > 0$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

Intégration par parties :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \qquad \int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-1+n)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

- $a(t)x' + b(t)x = 0$

Solutions sur un intervalle I :

$$f(t) = ke^{-G(t)} \quad \text{où } G \text{ est une primitive de } t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$$

- $ax'' + bx' + cx = 0$

Equation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ .

Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique.

Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{r t}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique.

Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines de l'équation caractéristique.